

공정평균이 선형적으로 변하는 제조공정의 최적 목표값의 설정

이재훈*·권혁무**·홍성훈***·이민구*

*충남대학교 정보통계학과

**부경대학교 시스템경영공학과,

***전북대학교 산업정보시스템공학과

Determination of the optimum target values for manufacturing processes with
linear shift in the process mean

Jae-Hoon Lee* · Hyuck Moo Kwon** · Sung Hoon Hong*** · Min-Koo Lee*

*Department of Information & Statistics, Chungnam National University

**Department of Systems & Management Engineering, Pukyong National University

***Department of Industrial & Information Systems Engineering, Chonbuk National University

Key words : Optimum Target Value, Process Mean Shift, Linear Shift, Production Cycle

Abstract

We consider the problem of selecting the most profitable initial process mean and length of production cycle for manufacturing processes subject to a constant linear trend during the same cycle that varies after resetting the processes.

Assuming that the quality characteristic of interest is normally distributed, the optimum initial process mean and the length of production cycle are jointly obtained by minimizing the expected loss per unit time. We assume that the quality loss function due to the deviation from the target value is quadratic and resetting loss is constant.

1. 서론

제품의 개발과정을 크게 제품설계, 공정설계 및 제조 세단계로 나누었을 때, 종래의 품질관리 활동은 관리도나 샘플링 검사 등을 주로 이용한 생산공정의 통제에 치우쳤다고 할 수 있다. 그러나 1980년대에 들어오면서 이러한 검사중심의 수동적인 관리활동에서 벗어나 보다 적극적인 예방중심의 관리활동에 대한 중요성이 강조되고 있다. 즉 공정설계나 제품설계 과정에서 품질관리 활동이 생산공정의 품질관리 활동에 비해 품질향상이나 비용절감 면에서 훨씬 효과적이라는 것이다. [Riew (1989)] 품질보증에 관련된 최근의 연구동향이나 산업체의 움직임은 이미 만들어진 제품의 사후검사를 통하여 일정수준의 품질을 보증하던 기존의 방식에서 벗어나, 설계단계로부터

시작하여 제조공정의 적절한 관리를 통하여 불량률의 발생을 미연에 방지하는 방향으로 가고 있다. 이러한 공정설계 단계의 품질관리 활동을 위해 사용되는 대표적인 방법 중의 하나가 생산공정의 공정평균을 합리적으로 결정하고자 하는 최적 공정평균 결정방법이다.

Springer(1951)는 제품에 대한 규격하한과 상한이 있고, 규격하한에 미달되는 제품과 규격상한을 넘는 제품의 벌과비용이 서로 다른 경우 총 비용을 최소화하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었고, Betts(1962)는 규격하한이 주어진 문제에서 규격하한에 미달하거나 규격상한(upper limit)을 넘는 제품은 재가공할 때 기대이익을 최대화 하는 공정평균과 규격상한을 결정하는 문제를 다루었다. Hunter와 Kartha(1977)는 규격을 만족하는 제품은 일정한 가격에 판매하고 규격에 미달하는 제품은 할인해서 판매하는 경우에 기대이익을 최대화 하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. Golhar(1987)은 규격하한이 주어진 경우, 규격하한을 넘는 제품은 일정한 가격에 판매하고 규격하한에 미달되는 제품은 재가공할 때 기대이익을 최대화 하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. Boucher와 Jafari(1991)는 계수형 샘플링 검사에 기초해 제품의 품질을 검사할 때 공정평균과 로트의 합격·불합격 판정기준을 동시에 결정하는 문제를 다루었다. Chen(2004)은 비대칭인 다구찌의 2차 손실함수를 이용하여 최적 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다.

Jang 등(2000)은 공정평균이 선형적으로 변하는 공정에서 공정평균의 변화율이 균일분포를 따를 때 다구찌의 2차 손실함수가 품질특성치의 목표값에 대하여 대칭일 때와 비대칭일 때 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다. 그러나 제조공정의 과거 데이터를 분석해 보면 공정평균의 변화율은 균일분포보다는 정규분포에 가까움을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서는 Jang 등(2000)의 손실함수모형을 이용하여 공정평

균의 변화율이 정규분포를 따를 때 2차 손실함수의 규격이 존재하는 모형을 고려하여 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다룬다.

2. 모형

Jang 등(2000)은 튜브 롤링 공정에서 튜브의 바깥지름을 품질특성치로 하여 2차 손실함수로 손실이 발생할 때 손실함수 $L(x_t, \theta)$ 가

$$L(x_t, \theta) = C(x_t - m)^2, \quad -\infty \leq x_t \leq \infty$$

인 형태를 가지며 θ 가 균일분포 [$\theta \sim U(a, b)$]일 때, 손실의 형태가 규격 중심에 대하여 대칭인 경우와 비대칭인 경우 단위 제품 당 기대손실을 최소화 하는 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루었다. 그러나 튜브 롤링 공정의 과거 데이터를 살펴보면 튜브의 바깥지름 평균의 변화는 균일분포 보다는 정규분포에 가깝다는 것을 알 수 있었다. 따라서 본 논문에서는 θ 의 분포가 정규분포 [$\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$]를 따를 때, 제품의 규격($m \pm h$)이 존재하는 제품에 대하여 공정평균이 제품을 생산하는 시간에 따라서 증가하는 경우 최적 초기 공정평균과 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제를 다루고자 한다.

i) 기호

X_t : t 시점에서 제품의 품질특성치

μ_t : X_t 의 평균 (t 시점에서의 공정평균)

σ : X_t 의 표준편차

μ_0 : 초기 공정평균

θ : 단위시간당 공정평균의 변화율

μ_θ : 공정평균 변화율 θ 의 평균

σ_θ : 공정평균 변화율 θ 의 표준편차

τ : 공정평균의 재설정시간

$f(x_t)$: X_t 의 확률밀도함수

$g(\theta)$: θ 의 확률밀도함수

$\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$: 표준정규분포의 확률밀도함수, 누적분포함수

m : 품질특성치의 목표값

C : 손실함수의 비용계수

h : 목표값에서 한쪽 규격까지의 거리(폭)

E : 2차 손실함수 대칭모형에서 규격을 벗어났을 때의 폐기비용

R : 공정평균의 재설정비용

$L(x_t, \theta)$: 손실함수

EL : 공정평균의 재설정비용을 제외한 기대손실

ETL : 공정평균의 재설정비용을 포함한 총 기대손실

ii) 가정

1. 생산하는 시간에 따라서 공정평균은 단위시간당 θ 의 비율로 증가한다.
2. 단위시간당 한 개의 제품이 생산된다.
3. 품질특성치 X_t 는 정규분포를 따른다, $X_t \sim N(\mu_t = \mu_0 + \theta t, \sigma^2)$.
4. σ^2 는 변하지 않으며 그 값을 알고 있다.
5. 공정평균 변화율 θ 는 정규분포를 따른다, $\theta \sim N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$.
6. 생산되는 제품은 전수검사 한다.

품질특성치가 규격 내에 존재하는 경우에는 $C(x_t - m)^2$ 의 형태로 손실이 발생하며, 품질특성치가 규격을 벗어나는 경우에는 폐기비용 (E)이 발생한다. 따라서 t 시점에서 생산된 제품에 대한 손실함수 $L(x_t, \theta)$ 는

$$L(x_t, \theta) = \begin{cases} C(x_t - m)^2, & m - h \leq x_t \leq m + h \\ E, & x_t < m - h \text{ and } x_t > m + h \end{cases}$$

이다. t 시점에서 공정평균의 재설정비용을 제외한 기대손실은 다음과 같다.

$$EL = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{m-h}^{m+h} C(x_t - m)^2 f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{m-h} E f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{m+h}^{\infty} E f(x_t|\theta) g(\theta) dx_t d\theta \quad (1)$$

단위시간당 총 기대손실 ETL 은 공정평균을 재설정할 때까지 발생한 손실비용의 총합과 공정평균을 재설정하는데 드는 비용 R 을 더한 값을 공정평균의 재설정시간 τ 로 나눈 값이 된다. 따라서 총 기대손실 ETL 은 다음과 같이 얻어진다.

$$ETL = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (C[(\sigma^2 + \mu_0^2 - 2m\mu_0 + m^2)(\beta_1 - \gamma_1) - \sigma\{(m+h+\mu_0)\beta_3 - (m-h+\mu_0)\gamma_3\} + 2m\sigma(\beta_3 - \gamma_3)] + E(\gamma_1 - \beta_1) + E) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_{-\infty}^{\infty} C[2\theta t(\mu_0 - m)(\beta_2 - \gamma_2) + \theta^2 t^2(\beta_2 - \gamma_2) - \sigma\theta t(\beta_4 - \gamma_4)] d\theta dt + \frac{R}{\tau} \quad (2)$$

여기서 $\beta_1 = \Phi\left(\frac{m+h-\mu_0-\mu_\theta t}{\sqrt{t^2\sigma_\theta^2+\sigma^2}}\right)$,

$\beta_2 = g(\theta)\Phi\left(\frac{m+h-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$,

$\beta_3 = \frac{\sigma \text{EXP}\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(m+h-\mu_0-\mu_\theta t)^2}{\sigma^2+\sigma_\theta^2 t^2}\right\}\right]}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\sigma_\theta^2 t^2)}}$,

$\beta_4 = g(\theta)\phi\left(\frac{m+h-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$,

$\gamma_1 = \Phi\left(\frac{m-h-\mu_0-\mu_\theta t}{\sqrt{t^2\sigma_\theta^2+\sigma^2}}\right)$,

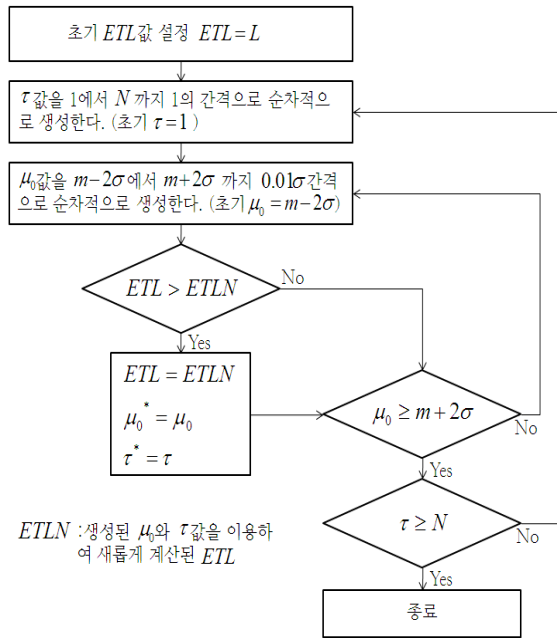
$\gamma_2 = g(\theta)\Phi\left(\frac{m-h-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$,

$\gamma_3 = \frac{\sigma \text{EXP}\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(m-h-\mu_0-\mu_\theta t)^2}{\sigma^2+\sigma_\theta^2 t^2}\right\}\right]}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\sigma_\theta^2 t^2)}}$,

$\gamma_4 = g(\theta)\phi\left(\frac{m-h-\mu_0-\theta t}{\sigma}\right)$ 이다.

3. 최적해

ETL에 정규분포의 확률밀도함수, 누적분포 함수 및 적분식이 포함되어 있기 때문에 closed form의 해를 구할 수 없다. 또한 ETL이 μ_0 와 τ 에 대하여 볼록(convex)함수임을 수리적으로 보일 수 없다. 따라서 본 절에서는 <그림 1>와 같은 휴리스틱 알고리즘을 이용하여 ETL을 최소로 하는 μ_0 와 τ 의 값을 구한다.



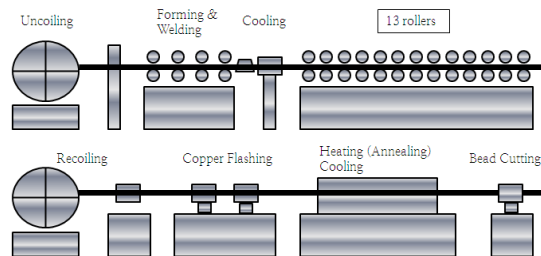
<그림 1> ETL을 최소로 하는 μ_0 와 τ 값을 구하는 알고리즘

충분한 크기의 초기 ETL값을 설정한 후 τ 값을 1부터 N까지, τ 에 따른 μ_0 값을 $m-2\sigma$ 부터 $m+2\sigma$ 까지 생성하여 각각의 값에 따른 새로운 단위시간당 총 기대손실, 즉 ETLN을 계산한다. 각각 계산되어진 ETLN값을 초기 ETL값과 비교하여 $ETL > ETLN$ 일 경우에는 $ETL = ETLN$ 으로 교체하며 $\mu_0^* = \mu_0$ 로, $\tau^* = \tau$ 로 저장한다. τ 와 μ_0 값의 증가에 따라

위의 과정을 거치게 되며 μ_0 가 $m+2\sigma$ 보다 큰 값을 가지며 τ 가 N보다 큰 값을 가지면 과정을 종료하게 된다. 최적 τ 값이 N이거나 최적 μ_0 값이 $m-2\sigma$ 혹은 $m+2\sigma$ 일 경우에는 N값을 높이거나 μ_0 값의 범위를 증가시키면서 최적해를 구한다. 여기서 N과 L값은 제조공정의 상황이나 종류에 따라 다른 값을 할당할 수 있다.

4. 수치 예제 및 분석

튜브공장의 튜브 롤링 공정은 <그림 2>에서 알 수 있듯이 감겨있는 튜브를 풀어 모양을 만들고 13개의 롤러를 통과하면서 튜브의 바깥지름을 결정한 후 비즈커팅(the bead's cutting)과 풀림(annealing), 동 플래싱(copper flashing) 작업을 거쳐 다시 감는 단계로 공정이 진행된다. 품질특성치는 튜브의 바깥지름, 강도, 경도, 두께 등이 있지만 무엇보다 중요한 품질특성치는 13개의 롤러를 통과하면서 결정되는 바깥지름이다.

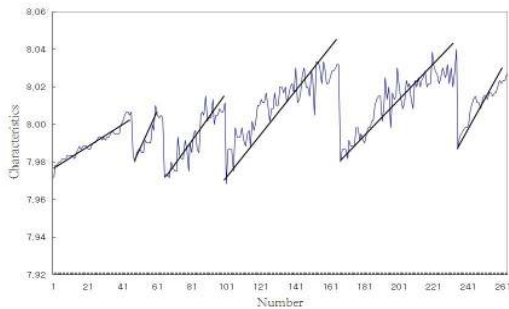


<그림 2> 튜브 롤링 공정

튜브 롤링 공정의 바깥지름을 결정하는 비교적 고가인 13개의 롤러들은 쉽게 마모된다. 이로 인하여 공정이 진행되면서 튜브의 지름 X_t 는 증가하게 되며 불량제품이 나올 확률이 증가하게 된다. 따라서 마모되어진 롤러들을 재설정해야 하는 문제가 발생하게 되는데, 롤러의 마모 정도를 측정하는 것은 불가능하고 비경제적이기 때문에 튜브의 지름을 주기적으

로 측정해야 한다.

목표치가 8mm인 튜브 제조 공정에서 12달 동안 튜브 바깥지름을 측정한 값에 대한 데이터를 그래프로 나타낸 것이 <그림 3>이다.



<그림 3> 튜브 데이터의 그래프와 추세선

<그림 3>으로부터 우리는 롤러가 5차례 재설정이 되었으며 6개의 부분군으로 나뉜 것을 볼 수 있다. 또한 추세선의 기울기들이 평균을 중심으로 랜덤하게 변하는 것으로 나타난다.

공정 평균 변화율 θ 가 주어졌을 때의 튜브의 지름 X_t 는 평균이 $\mu_t = \mu_0 + \theta t$ 이고 분산이 $(0.0165mm)^2$ 인 정규분포를 따르며 θ 는 평균이 0.00155이고 분산이 $(0.000375)^2$ 인 정규분포를 따른다. 또한 공정평균의 재설정비용과 손실함수의 계수 그리고 규격 ($m \pm h = 8 \pm 0.0495$)을 벗어났을 때의 폐기비용이 각각 $R = \$100$, $C = \$1150$, $E = \$30$ 일 때 2차 손실함수의 형태가 품질특성치의 목표값($m = 8mm$)을 중심으로 대칭인 경우 최적 μ_0^* 와 τ^* 그리고 ETL 을 구하면 다음과 같다.

$$\mu_0^* = 7.973mm,$$

$$\tau^* = 34h.$$

$$ETL = \$4.449.$$

5. 결론

본 논문에서는 제품의 품질특성치에 대한

규격이 주어졌을 경우, 손실함수가 2차 형태일 때 품질특성치의 목표값에 미달하는 제품과 품질특성치의 목표값을 넘는 제품의 손실이 같고 규격하한에 미달하는 제품과 규격상한을 넘는 제품의 폐기비용이 같을 경우, 단위시간당 기대손실을 최소로 하는 초기 공정평균과 공정평균 재설정시간을 결정하였다.

본 논문에서 제안한 방법을 제조현장에 적용하면 다양한 공정 상황에서 비효율적인 공정평균의 재설정을 방지할 수 있으며 또한 비용절감과 품질향상을 이룰 수 있다.

추후 연구과제로는 제조공정에서 공정평균의 변화뿐만 아니라 공정분산의 변화에 따른 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간을 결정하는 문제와 주 품질특성치 대신에 대응 품질특성치를 이용하여 검사하는 제조공정의 초기 공정평균 및 공정평균의 재설정시간 및 대응변수의 검사기준값을 결정하는 문제 등이 있다.

참고문헌

- [1] Betts D. C. (1962). "Finding an Optimum Target Value in Relation to a Fixed Lower Limit and an Arbitrary Upper Limit." Applied statistics 11. pp. 202-210
- [2] Boucher T. O. and Jafari M (1991) "The Optimum Target Value for Single Filling Operations with Quality Sampling Plans." Journal of Quality Technology 23, pp. 44-47
- [3] Chen C. H. (2004) "Determining the optimum process mean based on Asymmetric Quality Loss Function and Rectifying Inspection Plan." IEEE: Industrial Engineering Management Conference 1080-1084
- [4] Golhar D. Y. (1987). "Determination of the Best Mean Contents for a Canning problem." Journal of Quality Technology 19, pp. 82-84

- [5] Hunter W. G. and Kartha, C. D. (1977). "Determining the Most Profitable Target Value for a Production Process." *Journal of Quality Technology* 9, pp. 176–180
- [6] Jang J. S.; Ahn D. G.; Lee M. K.; Elsayed E. A. (2000) "Optimum Initial Process Mean and Production Cycle for Processes with Linear Trend." *Quality Engineering* 13(2), pp. 229–235
- [7] Riew M. C. (1991) "Economic Selection of Specification Limits for a given Target Value." *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers* 15, pp. 57–69
- [8] Springer C. H. (1951). "A Method for Determining the Most Economic Position of a Process Mean." *Industrial Quality Control* 8(1), pp. 36–39